Sunto. Si passano in rassegna alcune disuguaglianze di Sobolev-Poincarè pesate in $\mathbb{R}^n$ e per funzioni olomorfe; vengono quindi presentati alcuni risultati nel campo olomorfo, ottenuti in collaborazione con R. Rochberg e E. Sawyer.

Abstract. In this seminar, I report on recent joint work with Richard Rochberg and Eric Sawyer on Carleson measures for the analytic Dirichlet spaces, that is, on weighted Sobolev-Poincaré inequalities for holomorphic functions [A], [AR], [ARS]. Consider the unit disc $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ in the complex plane and let $a \geq 0$ fissato. The *analytic Dirichlet space* $\mathcal{D}_a$ is the space of those functions f which are holomorphic in D, having finite seminorm $\|f\|_a$,

$$\|f\|_a^* = \left(\int_D |f'(z)|^2(1-|z|^2)^a dm(z)\right)^{1/2} \tag{1}$$

We say that a positive, Borel measure μ on D is *Carleson* for $calD_a$ if $\mathcal{D}_a$ is imbedded in $L^2(\mu)$. Knowledge of the Carleson measures is important in understanding the properties of the analytic Dirichlet spaces (multipliers, Toeplitz operators, interpolating sequences...).

The following is a rather simple characterization of the Carleson measures. Let I be an arc on the boundary of D. The *Carleson box* based on I, $S(I)$, is defined as

$$S(I) = \left\{z \in D : \frac{z}{|z|} \in I,\ 1 - \frac{|I|}{2\pi} < |z|\right\}$$

Let $z \in D$. I_w will denote the arc on the boundary of D, centered at $w/|w|$ and having length $4\pi(1-|w|)$.

Theorem 1 *Let $0 \leq a < 1$. A measure μ su D is Carleson for $\mathcal{D}_a$ if and only if, for all arcs I on ∂D, the following condition holds,*

$$\int_{S(I)} \left(\frac{\mu(S(I_w)\cap S(I))}{|I_w|^{a/2}}\right)^2 \frac{dm(w)}{(1-|w|^2)^2} \leq C(\mu)\mu(S(I)) \tag{2}$$

The proof of the theorem follows the following pattern. First, it is shown that a measure is Carleson (on the unit disc) if and only if a discretized version of it satisfies a Hardy-type inequality on a dyadic tree. Then, the discrete measures on trees that satisfy such inequality are characterized.

The seminar is structured as follows. In §1, I review some classical results on weighted Sobolev-Poincaré inequalities, which form the counterparts of the Carleson measures in the setting of Sobolev spaces. §2 contains a survey on Carleson measures, including some new results. The proof of the main theorem, modulo the characterization of the "Hardy inequalities on trees" is contained in §3, while §4 discusses some applications and problems. The characterization of the Hardy inequalities on trees is proved in the appendix.

1 Disuguaglianze di traccia in $\mathbb{R}^n$

Le disuguaglianze di Sobolev per funzione olomorfe che discuterò in questo seminario sono speculari ad analoghe disuguaglianze in $\mathbb{R}^n$, che storicamente le precedono e di cui darò un breve sunto in questo paragrafo introduttivo.

Sia $p > 0$, e consideriamo il problema di caratterizzare "geometricamente" tutte le misure μ (positive, di Borel) su $\mathbb{R}^n$ per cui valga la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré pesata

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p d\mu(x)\right)^{2/p} \leq C(\mu) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \tag{3}$$

qualunque sia la funzione $u \in C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sulle costanti, manterrò la convenzione secondo cui C denota una generica costante universale (dipendente da n e p solamente), mentre $C(\mu)$ indica una costante che dipende anche da μ. A parziale motivazione del problema, consideriamo il caso in cui $\mu = \mathcal{H}_k$ sia la misura di Hausdorff k-dimensionale ristretta a una sottovarietà lineare k-dimensionale L_k di $\mathbb{R}^n$. Se (3) vale, allora una funzione f nello spazio di Sobolev $W^{1,2}$ ha una restrizione (*traccia*) $g = f|_{L_k}$ a L_k e g sta in $L^p(L_k)$, il che è significativo poichè, a priori, f non è neppure definita su L_k, essendo definita solo q.o. in $\mathbb{R}^n$. Per questo motivo, disuguaglianze del tipo (3) sono anche dette *disuguaglianze di traccia*. Per analogia, chiameremo le misure μ che soddisfano (3) *misure di traccia* per $(W^{1,2}, p)$. Per inciso, il problema delle disuguaglianze di traccia è stato considerato per tutti gli spazi $W^{1,q}$, $q > 1$, ma preferiamo considerare il solo caso $q = 2$ per evitare una fastidiosa proliferazione di indici. Porremo anche, per semplicità, $n > 2$.

Per avere un'idea di condizioni necessarie affinchè la disuguaglianza di traccia valga, imponiamo che (3) sia verificata dalla funzione caratteristica di una palla B in $\mathbb{R}^n$, opportunamente regolarizzata. Ne deduciamo che

$$\mu(B) \leq C(\mu) m(B)^{\frac{p}{2}(1-\frac{2}{n})} \tag{4}$$

Qui e nel seguito, m indica la misura di Lebesgue. Nel 1973, Adams [Ad] mostrò che, se $p > 2$, questa semplice condizione, valendo per tutte le palle B in $\mathbb{R}^n$, caratterizza le misure μ per cui è valida (3); ma espliciti controesempi mostrano che ciò non è vero per $q = 2$. [1]

[1] Vale la pena di soffermarsi un momento sulla condizione di Adams. Sarebbe naturale chiedere che la disuguaglianza (4), valendo per palle B di raggio R, valga anche per

Consideriamo allora, più in generale, un insieme E compatto in $\mathbb{R}^n$ e la classe $\mathcal{F}(E)$ delle funzioni positive $u \in C_0^\infty$ tali che $u \geq 1$ su E. Supponendo che (3) valga e passando all'estremo inferiore del membro a destra di (3) calcolato per funzioni in $\mathcal{F}(E)$ otteniamo, per la definizione stessa di capacità [AdH], che

$$\mu(E) \leq C(\mu)\mathrm{Cap}_2(E)^{p/2} \tag{5}$$

Elementari stime mostrano che la condizione (5), che chiamerò d'ora in poi (M), coincide con (4) sulle palle di $\mathbb{R}^n$. Già negli anni '60, Maz'ya [M] aveva dimostrato che, se $p \geq 2$, la "disuguaglianza isoperimetrica" (5) è anche sufficiente affinchè sia verificata la disuguaglianza di traccia (3). Per quanto questa caratterizzazione si sia dimostrata utile negli sviluppi della teoria, non è semplice, in pratica, verificare se una data misura μ soddisfi o meno (5).

Negli ultimi quindici anni sono state proposte altre, più semplici caratterizzazioni delle misure di traccia nel caso $p = 2$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 d\mu(x) \leq C(\mu) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \tag{6}$$

Considererò solo, poichè attinenti al caso olomorfo, due condizioni dovute a Kerman e Sawyer. Prima di enunciarle, ricordo la definizione di integrale frazionario di una misura ν,

$$I_1\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\nu(y)}{|x-y|^{n-1}}$$

e il fatto che, per esempio, via l'isometria L^2 della trasformata di Riesz, (6) è equivalente alla limitatezza di I_1 da L^2 a $L^2(\mu)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_1 v(x)|^2 d\mu(x) \leq C(\mu) \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^2 dx \tag{7}$$

per $v \in L^2$. La prima condizione, che chiamerò (KS_1), è la richiesta che, per ogni palla B in $\mathbb{R}^n$, si abbia la disuguaglianza

$$\int_B [I_1(\mu|_B)(x)]^2 dx \leq C(\mu)\mu(B) \tag{8}$$

---

palle B di raggio $2R$ e $R/2$. Un semplice esercizio mostra che ciò è possibile solo se $p = 2^* = 2n/(n-2)$, l'esponente di Sobolev coniugato a 2: ritroviamo così la classica disuguaglianza di Sobolev.

dove $\mu|_B$ indica la restrizione di μ a B. La seconda, (KS_∞), chiede invece che valga

$$\int_B \sup_{x\in B'\subseteq B} \left(\frac{\mu(B')}{m(B')^{1-\frac{1}{n}}}\right)^2 dx \leq C(\mu)\mu(B) \tag{9}$$

dove il sup è preso sulle palle B' contenenti x e contenute in B. Si osservi che le condizioni (8) e (9) non sono omogenee in μ.

Rispetto alla condizione capacitaria di Maz'ya, (KS_1) e (KS_∞) hanno il pregio di dover essere verificate solo su palle di $\mathbb{R}^n$. Ora, per mostrare che, per esempio, (KS_1) è necessaria, si trasforma la disuguaglianza di traccia in (7), si passa alla disuguaglianza duale e si impone a quest'ultima di essere soddisfatta dalla funzione caratteristica di B, ritrovando così (8).

A tutt'ora non esiste una dimostrazione diretta che tutte queste condizioni, cioè, (KS_1), (KS_∞) e la capacitaria (M), sono, come sappiamo essere, equivalenti[2]. Semplici condizioni sufficienti affinchè μ sia di traccia, ma non necessarie e valide solo quando μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, furono trovate da C. Fefferman e Phong [F], che erano interessati ad applicazioni nello studio della distribuzione degli autovalori per l'operatore di Schrödinger.

Il salto di complessità tra $p > 2$ e $p = 2$ si ripete quando si passa a considerare $1 < p < 2$, nel qual caso esiste una caratterizzazione di tipo capacitario molto intricata, dovuta a Maz'ya e Netrusov, per cui rimandiamo a [V]. Di recente, tuttavia, Cascante, Ortega e Verbitsky [COV] hanno ottenuto una forse più trattabile caratterizzazione non capacitaria. Per $r > 0$, sia $B_r(x)$ la palla centrata in x di raggio r Si definisca il *potenziale di Wolff* di una misura μ come

$$W\mu(x) = \int_0^\infty \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))^{1-\frac{p}{2}}} \frac{dr}{r}$$

Allora, se $1 < p < 2$, la disuguaglianza di traccia (3) vale se, e solo se,

$$W\mu \in L^{\frac{p}{2-p}}(\mu)$$

Ultimamente, gli stessi autori hanno esteso questa caratterizzazione a tutto l'intervallo $0 < p < 2$.

[2]Preparando il testo del seminario, mi sono accorto che, modificando un argomento a base di tempi d'arresto in [AR], si ottiene una dimostrazione diretta che (KS_1) e (KS_∞) sono equivalenti. D'altra parte, un argomento di dualità mostra che (M) implica (KS_1) [V]. Il problema rimane quello di dimostrare direttamente che (KS_1) implica (M).

Va detto che tutti questi risultati sono stati estesi non solo a potenze diverse da 2, ma anche a diversi spazi e con operatori molto generali al posto di I_1. Si vedano [V] e [KV], con le rispettive bibliografie.

2 Misure di Carleson in $\mathbb{C}$

In questo paragrafo descriverò le versioni olomorfe delle disuguaglianze di traccia. Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco unitario nel piano complesso e sia $a \geq 0$ fissato. Lo *spazio di Dirichlet analitico* $\mathcal{D}_a$ è costituito dalle funzioni f che sono olomorfe in D, per cui la seminorma

$$\|f\|_a^* = \left(\int_D |f'(z)|^2(1-|z|^2)^a dm(z)\right)^{1/2} \tag{10}$$

è finita. $\mathcal{D}_a$ può essere pensato come uno spazio di Hilbert con la norma $\|f\|_a = \|f\|_a^* + |f(0)|$. Nella scala degli spazi di Dirichlet analitici, alcuni sono particolarmente interessanti. Se $a = 0$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, la seminorma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0^*$ è *conformemente invariante*, con ciò intendendo che, se τ è una biiezione olomorfa di D (cioè, τ è una mappa di Möbius di D),[3] allora $\|f\circ\tau\|^* = \|f\|^*$. Questo fenomeno può essere interpretato geometricamente. È ben noto che che la metrica Riemanniana

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} \tag{11}$$

rende D un modello per la geometria iperbolica piana, ovvero, per la geometria non euclidea di Lobacevsky. Scrivendo

$$\|f\|^{*2} = \int_D |(1-|z|^2)f'(z)|^2 \frac{dm(z)}{(1-|z|^2)^2}$$

vediamo che $\|f\|^*$ è la norma L^2 del gradiente iperbolico di f (che, in modulo, vale $|(1-|z|^2)f'(z)|$) rispetto alla misura iperbolica, $\frac{dm(z)}{(1-|z|^2)^2}$; ma le mappe di

[3]Le trasformazioni di Möbius di D hanno la forma

$$\varphi(z) = u\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

con $|u| = 1$ e $|a| < 1$. Esse costituiscono un gruppo isometrico a $SL(2,\mathbb{R})$.

Möbius sono isometriche nella geometria iperbolica, da cui segue l'invarianza conforme.

Se invece $a = 1$, allora $\|f\|_1$ è equivalente alla norma di f in H^2, lo spazio di Hardy,

$$\|f\|_{H^2}^2 = \int_{[0,2\pi]} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

Scrivendo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e utilizzando la formula di Plancherel, l'equivalenza delle norme è immediata. Ora, un famoso teorema di Carleson [Car] ci dice che la disuguaglianza

$$\int_D |f|^2 d\mu \leq C(\mu)\|f\|_{H^2}^2 \sim \|f\|_1^2$$

vale per una misura positiva μ su D se, e solo se, per ogni intervallo I sul bordo di D,

$$\mu(S(I)) \leq C(\mu)|I| \tag{12}$$

dove

$$S(I) = \left\{z \in D : \frac{z}{|z|} \in I,\ 1 - \frac{|I|}{2\pi} < |z|\right\}$$

è la *scatola di Carleson* di base I. In generale, diremo che una misura μ su D è una *misura di Carleson* per $(\mathcal{D}_a, p)$ se la disuguaglianza

$$\left(\int_D |f|^p d\mu\right)^{\frac{2}{p}} \leq C(\mu)\|f\|_a^2 = C(\mu)\left[\int_D |f'(z)|^2(1-|z|^2)^a dm(z) + |f(0)|^2\right] \tag{13}$$

vale per ogni funzione f olomorfa in D. Quando $p = 2$, diciamo semplicemente che μ è di *Carleson* per $\mathcal{D}_a$. In letteratura il problema delle misure di Carleson è stato considerato con una varietà di pesi al posto di $(1-|z|^2)^a$ e con esponenti diversi da 2, ma qui discuterò solo gli spazi $\mathcal{D}_a$, che già costituiscono degli esempi significativi.

Prima di enunciare i risultati, vale la pena di fare un'osservazione generale. Mentre le funzioni Sobolev possono esibire le loro irregolarità sia "in piccolo" che "in grande", le funzioni olomorfe in D, se hanno delle patologie, le mostreranno al bordo, ∂D. Dunque, il ruolo svolto dalle palle negli spazi di Sobolev sarà qui assunto da oggetti di frontiera: in breve, dalle scatole di Carleson.

Passando ai teoremi di caratterizzazione, consideriamo innanzitutto l'interessante caso $p = 2$. Per $a = 1$, abbiamo visto come le misure di Carleson

siano caratterizzate da una semplice condizione "a una scatola". D'altra parte, non è difficile verificare che, per tutti gli $a > 0$, una condizione *necessaria* affinchè μ sia di Carleson per $\mathcal{D}_a$ è che valga

$$\mu(S(I)) \leq C(\mu)|I|^a \tag{14}$$

Nel caso geometrico $a = 0$, questa condizione va rimpiazzata dalla condizione limite

$$\mu(S(I)) \leq C(\mu)\left(1 + \log\left(\frac{2\pi}{|I|}\right)\right)^{-1} \tag{15}$$

Non a caso, il membro a destra è comparabile con $(1 + d(0, S(I)))^{-1}$, dove $d(0, S(I))$ è la distanza iperbolica tra 0 e la scatola $S(I)$. Generalizzando l'originale teorema di Carleson, Stegenga [Ste] mostrò nel 1980 che, se e solo se $a \geq 1$, allora (14) è anche ***sufficiente*** affinchè μ sia di Carleson per $\mathcal{D}_a$. [4]

Nell'intervallo $0 \leq a < 1$, Stegenga dimostrò una caratterizzazione capacitaria delle misure di Carleson, che si può più facilmente enunciare per $a = 0$. Se E è un'unione disgiunta di archi su ∂D, sia $S(E)$ l'unione delle scatole di Carleson costruite su questi archi. Allora, μ è di Carleson per $\mathcal{D}$ se e solo se, per ogni E di questo tipo,

$$\mu(S(E)) \leq C(\mu)\left(\log\frac{1}{\text{cap(E)}}\right)^{-1}$$

Qui, *cap* indica la capacità logaritmica[5].

La condizione capacitaria di Stegenga ricorda quella di Maz'ya, ma qui gli insiemi di cui si deve stimare la capacità si sono mossi verso il bordo. Pochi anni dopo, Kerman e Sawyer [KS2] mostrarono che una variante della

---

[4] Il ruolo di $a = 1$ emerge anche dal fatto che, per $a < 1$, la condizione (14) non è additiva. Siano I_- e I_+ le due metà dell'arco I. Allora,

$$\mu(S(I_-)) + \mu(S(I_+)) \leq \mu(S(I)) \leq C(\mu)|I|^a$$

Dal fatto che (14) valga con I_- e I_+, invece, segue che la somma delle due misure sia limitata da $2^{1-a}C(\mu)|I|$, il che costituisce una migliore informazione solo se $a \geq 1$.

[5] Data una misura positiva μ a supporto compatto, sia

$$I(\mu) = \int\int \log|z - w| d\mu(z) d\mu(w)$$

l'energia (con segno meno!) della misura μ. Allora, log(cap(E)) è l'estremo superiore di $I(\mu)$, al variare di μ tra le misure di massa unitaria aventi supporto in E.

condizione (KS_∞) poteva coprire i casi $0 \leq a \leq 1$. Cioè, una condizione necessaria e sufficiente affinchè μ sia di Carleson è che valga la condizione (KS_∞^a) su ogni arco I in ∂D,

$$\int_I \sup_{x \in J \subset I} \left(\frac{\mu(S(J))}{|J|^{(a+1)/2}} \right)^2 dx \leq C(\mu)\mu(S(I)) \qquad (16)$$

L'interesse di questa condizione è duplice. Da un lato, deve essere verificata solo su singoli archi. Dall'altra, getta un ponte tra i semplici casi $a \geq 1$ e i complicati $0 \leq a < 1$. Purtroppo, la dimostrazione fa un uso cruciale della formula di Plancherel, e non può quindi essere estesa a esponenti diversi da 2 sul lato della derivata.

Un'altra caratterizzazione "su singoli archi" delle misure di Carleson, questa volta nello spirito di (KS_1), viene dimostrata in [ARS]. Ci occorre un'ulteriore notazione. Sia $z \in D$. I_w indica l'arco di centro $w/|w|$ su ∂D, avente lunghezza $4\pi(1-|w|)$.

Teorema 2 *Sia $0 \leq a < 1$. Una misura μ su D è di Carleson per $\mathcal{D}_a$ se e solo se, per ogni arco I su ∂D, vale la seguente condizione (KS_1^a),*

$$\int_{S(I)} \left(\frac{\mu(S(I_w) \cap S(I))}{|I_w|^{a/2}} \right)^2 \frac{dm(w)}{(1-|w|^2)^2} \leq C(\mu)\mu(S(I)) \qquad (17)$$

Sulla sinistra di (17), l'integrale è calcolato rispetto alla misura iperbolica. Si osservi che, al contrario della caratterizzazione di Kerman e Sawyer, qui non viene coperto il caso $a = 1$, corrispondente ad H^2. Infatti, si può mostrare che (17) è *strettamente più forte* di (14) ogniqualvolta $a \geq 0$. Una dimostrazione *diretta* che le condizioni (KS_∞^a) e (KS_1^a) sono equivalenti per $0 \leq a < 1$, una cosa che già sappiamo *a priori*, è contenuta in [AR]. Rimando a [ARS] e alla sua bibliografia per caratterizzazioni delle misure di Carleson in contesti più generali.

La dimostrazione del teorema, quindi l'enunciato, si estendono a potenze diverse da 2 sul lato della derivata, che comunque non sono oggetto di questo seminario. Essa è basata su di una procedura di discretizzazione e sullo studio di alcune disuguaglianze di Hardy pesate nel discreto, di cui parlerò tra poco. Di passaggio, noto che (17), opportunamente modificata, è *sufficiente* affinchè μ sia di Carleson, qualsiasi peso ragionevole si metta sul lato della derivata.

Nel caso $p \neq 2$, gli unici risultati che conosco sono quelli dimostrati in [ARS] e [A]. Per comodità, considero il solo caso $a = 0$. Se $p > 2$, in analogia

con il teorema di Adams, viene dimostrato in [ARS] che μ è di Carleson per $(\mathcal{D}, p)$ se e solo se vale la condizione "a una scatola"

$$\mu(S(I)) \leq C(\mu)\left(1+\log\left(\frac{2\pi}{|I|}\right)\right)^{-p} \sim C(\mu)(1+d(0,S(I)))^{-p}$$

dove d è la distanza iperbolica. Per il caso $1 < p < 2$, ci occorre una definizione. Sia $a \in D$ e sia $[0,a]$ il segmento tra 0 e a. Data una misura positiva μ su D, si definisca il suo *potenziale di Wolff olomorfo*, $W\mu$, come

$$W\mu(a) = \int_{[0,a]} \mu(S(I_w))\frac{|dw|}{1-|w|^2}$$

Allora, se $1 < p < 2$, μ è di Carleson per $(\mathcal{D}, p)$ se e solo se

$$\int_{\mathbf{D}} (W\mu(z))^{\frac{p}{2-p}}\, \mu(dz) < \infty$$

Questo teorema di caratterizzazione, dimostrato in [A], è motivato dalla curiosità di vedere cosa succede "oltre la frontiera", più che da applicazioni allo studio degli spazi di Dirichlet.

Anche nel caso olomorfo, dicevo, molti dei risultati che ho riportato sono stati estesi a una varietà di esponenti e di spazi pesati. Rimando ad [ARS] e [AR] per un'analisi dettagliata della letteratura. In compenso, ho cercato di mantenere l'esposizione completa e accessibile. Delle funzioni olomorfe utilizzerò solo la proprietà del valor medio e la sviluppabilità in serie. L'unico risultato non elementare cui farò appello è la determinazione dello spazio duale di $\mathcal{D}$.

3 Discretizzazione e dimostrazione del Teorema 2

Per la dimostrazione del Teorema 2, abbiamo bisogno di "software" e "hardware". Il "software" consiste in una procedura che riduce il problema delle misure di Carleson a un problema di disuguaglianze di Hardy pesate e discrete, la soluzione del quale costituisce l' "hardware". Prima di procedere, vorrei enunciare alcuni principi euristici, che ci permettono di creare allegorie discrete di alcuni problemi nel continuo.

(i) Come detto più sopra, gli oggetti rilevanti nel caso olomorfo sono versioni *al bordo* di quegli oggetti che sono rilevanti negli spazi di Sobolev.

(ii) A fini di proprietà quantitative, le funzioni olomorfe possono essere considerate *costanti su dischi* Δ *in* D*, aventi diametro comparabile alla loro distanza dal bordo* ∂D. Per funzioni armoniche positive, questo principio non è solo euristico, ed è codificato nella disuguaglianza di Harnack. (Nella metrica iperbolica, questi dischi hanno raggio comparabile).

(iii) Siano Δ_1 e Δ_2 due dischi disgiunti in D, aventi diametro comparabile alla loro distanza al bordo. Per funzioni $f \in \mathcal{D}_a$, $0 \leq a < 1$, i valori di f' su Δ_1 e Δ_2 sono *essenzialmente scorrelati*; cioè, la proprietà del valor medio è irrilevante "in grande". (Quest' ultimo principio, a differenza dei due precedenti, non vale se $a = 1$).

Mentre i principi (i) e (ii) sono intuitivi e ben noti agli analisti armonici, non ho una spiegazione convincente per (iii), ma spesso funziona.

Per introdurre la procedura di discretizzazione, abbiamo bisogno di partire D in maniera opportuna e di qualche nozione dalla teoria dei grafi. Consideriamo una *scomposizione di Whitney* del disco D, cioè, una partizione di D in regioni aventi diametro comparabile con la loro distanza dal bordo. Esplicitamente, per ogni coppia di interi n e m, $n \geq 0$, $1 \leq m \leq 2^n$, consideriamo il *disco di Whitney*

$$\Delta_{n,m} = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon 2^{-n-1} \leq 1 - |z| \leq 2^{-n}, \left| \frac{\arg(z)}{2\pi} - \frac{m}{2^n} \right| \leq 2^{-(n+1)} \right\}.$$

I dischi di Whitney sono la metà superiore di scatole di Carleson. Approssimativamente, coincidono con dischi di raggio fissato nella geometria iperbolica. Di queste regioni ci interessano poche, elementari proprietà:

(m) $m(\Delta_{n,m}) \sim 2^{-2n}$;

(d-d) $dist(\Delta_{n,m}, \partial D) \sim diam(\Delta_{n,m}) \sim 2^{-n}$;

(s) dato un "disco" $\Delta_{n,m}$, si considerino le otto regioni Δ' la cui chiusura interseca quella di Δ. La chiusura dell'unione di queste forma una anello $A(\Delta)$ avente distanza da ∂D comparabile sia al diametro di Δ che alla distanza del bordo interno di A da quello esterno.

Denotiamo con $T = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2,\ n \geq 0,\ 1 \leq m \leq 2^n\}$ l'insieme degli indici, cui diamo una struttura di grafo dicendo che due punti α e α' di T sono congiunti da un *lato* del grafo se le regioni Δ_α e $\Delta_{\alpha'}$ hanno un arco di circonferenza in comune (figurativamente, se si incontrano "in verticale"). T viene così ad assumere la struttura di *albero*, cioè, di grafo connesso e semplicemente connesso. Una *geodetica* in T è una successione finita o infinita di punti $\alpha_k \in T$, senza ripetizioni e tali che α_k e α_{k+1} sono congiunti da un lato del grafo. In particolare, se α e β sono in T, $[\alpha, \beta]$ indica la geodetica di cui sono estremi. Fissiamo $o = (0, 1)$ come *radice* di T e definiamo una relazione d'ordine parziale: $\alpha \leq \beta$ se $\alpha \in [o, \beta]$. Se $\alpha \in T$, poniamo $|\alpha|$ il numero dei lati nella geodetica $[o, \alpha]$, cioè, $|\alpha| = \sharp[o, \alpha] - 1$.

Per ogni α fissato in T, siano $P(\alpha) = [o, \alpha]$ l'insieme dei *predecessori* di α e $S(\alpha) = \{\beta \in T : \beta \geq \alpha\}$ l'insieme dei suoi *successori*.

Ora, data una funzione $h : T \to \mathbb{R}$, dove T è pensato come insieme di vertici. La *primitiva* di h è la funzione $\mathcal{I}h : T \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathcal{I}h(\alpha) = \sum_{\beta \in P(\alpha)} h(\beta)$$

Sia ora μ una misura su D. Definiamo un'altra misura su T, che con comodo abuso di notazione chiameremo ancora μ, ponendo $\mu(\alpha) = \mu(\Delta_\alpha)$.

Abbiamo allora il seguente teorema.

Teorema 3 *Siano* $1 < p < \infty$, $0 \leq a < 1$ *e* μ *una misura positiva su* D. *Allora,* μ *è di Carleson per* $(\mathcal{D}_a, p)$, *cioè,*

$$\left(\int_D |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq C(\mu)\|f\|_a = C(\mu)\left[\int_D |f'(z)|^2(1 - |z|^2)^a dm(z) + |f(0)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

se e solo se la corrispondente misura μ *su* T *soddisfa*

$$\left(\sum_{\alpha \in T} |\mathcal{I}h(\alpha)|^p \mu(\alpha)\right)^{1/p} \leq C'(\mu)\left(\sum_{\beta \in T} |h(\beta)|^2 2^{-a|\beta|}\right)^{1/2} \tag{19}$$

per ogni $h : T \to \mathbb{R}$.

La disuguaglianza (19) può essere interpretata come una disuguaglianza di Hardy pesata sull'albero T. La novità del Teorema 3, che appare in [A], consiste essenzialmente nell'enunciato, in quanto la sua dimostrazione è un distillato di diverse dimostrazioni contenute in [ARS]. Esso riduce completamente il problema delle misure di Carleson a un problema nel discreto.

Avremo bisogno della seguente definizione. Per $\alpha \in T - \{o\}$, sia α^- *l'immediato predecessore di* α: $\alpha^- < \alpha$ e $d(\alpha, \alpha^-) = 1$.

Dimostrazione. L'argomentazione è la stessa per tutti i p, porrò quindi $p = 2$. Porrò anche $a = 0$, per semplicità di notazione, mettendo in rilievo al momento opportuno dove entra l'ipotesi $a < 1$.

La dimostrazione che (19) implica (18) consiste in una rozza maggiorazione basata sulla proprietà del valor medio. Sia f olomorfa in D e, per $\alpha \in T$, sia $\Phi(\alpha) = \sup_{w \in \Delta_\alpha} |f(w)|$. Allora,

$$\int_D |f(z)|^2 d\mu(z) \leq \sum_{\alpha \in T} |\Phi(\alpha)|^2 \mu(\alpha)$$

Ora, costruiamo $\phi : T \to \mathbb{R}$ ponendo $\phi(o) = \Phi(o)$ e $\phi(\alpha) = \Phi(\alpha) - \Phi(\alpha^-)$, cosicchè $\Phi = \mathcal{I}\phi$. A causa di (19), dunque

$$\int_D |f|^2 d\mu \leq \sum_{\alpha \in T} |\phi(\alpha)|^2$$

Siano $z_\alpha, w_\alpha \in \overline{\Delta_\alpha}$ tali che $|f(z_\alpha)| = \Phi(\alpha) = \sup_{z \in \Delta_\alpha} |f(z)|$ e $|f'(w_\alpha)| = \sup_{w \in \Delta_\alpha} |f'(w)|$. Allora, per $\alpha \neq o$, integrando su di un cammino lineare a tratti tra $z(\alpha)$ e $z(\alpha^-)$,

$$\begin{aligned} |\phi(\alpha)| &= |\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha^-)| \\ &= \left| \int_{z(\alpha^-)}^{z(\alpha)} f'(w) dw \right| \\ &\leq C\left(|f'(w_\alpha)| + |f'(w_{\alpha^-})|\right) \operatorname{diam}(\Delta_\alpha) \end{aligned}$$

dove C è una costante, e un calcolo simile mostra che

$$\phi(o) \leq |f'(w_o)| \operatorname{diam}(\Delta_o) + |f(0)|.$$

Sommando su α e tenendo in conto che ogni β in T ha solo due successori immediati, ne deduciamo che

$$\int_D |f|^2 d\mu \leq C(\mu) \sum_{\alpha \in T} |f'(w_\alpha)|^2 + C(\mu)|f(0)|^2$$

Per ogni α, si consideri in D il disco chiuso $B_\alpha = B_\alpha(w_\alpha, (1 - |w_\alpha|)/3)$. Per la proprietà del valor medio,

$$f'(w_\alpha) = \frac{1}{m(B_\alpha)} \int_{B_\alpha} f'(z) m(dz) \qquad (20)$$

Ora, $m(B_\alpha)$ è comparabile con $m(\alpha) = m(\Delta_\alpha) \sim 2^{-2|\alpha|}$ e l'insieme dei $\beta \in T$ tali che $\Delta_\beta \cap B(\alpha) \neq \emptyset$ è limitato da una costante (4, infatti). Quindi, per la disuguaglianza di Jensen (o di Hölder),

$$|f'(w_\alpha)|^2 \leq C\frac{1}{m(\alpha)} \int_{\cup_{\Delta_\beta \cap B_\alpha \neq \emptyset} \Delta_\beta} |f'(z)|^2 m(dz)$$

Concludendo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{D}} |f(z)|^2 \mu(dz) &\leq C(\mu) \sum_{\alpha \in T} \frac{1}{m(\alpha)} \int_{\Delta_\alpha} |f'(z)|^2 m(dz)\ \mathrm{diam}(\alpha)^2 + C(\mu)|f(0)|^2 \\ &\leq C(\mu) \sum_{\alpha \in T} \int_{\Delta_\alpha} \left|(1-|z|^2)f'(z)\right|^2 \frac{m(dz)}{(1-|z|^2)^2} + C(\mu)|f(0)|^2\end{aligned}$$

come si voleva dimostrare.

Per la dimostrazione dell'implicazione inversa, usiamo un comune gioco di prestigio basato sulla dualità e la semplice stima di un nucleo riproducente. Senza perdere in generalità, Possiamo supporre che μ sia supportata nell'anello $\{1/2 < |z| < 1\}$. Il fatto che μ sia di Carleson equivale alla continuità dell'identità, Id,

$$Id : \mathcal{D} \to L^2(\mu)$$

Ora, è ben noto che lo spazio duale di $\mathcal{D}$ rispetto al prodotto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}} = \int_D f'\overline{g'} dm + f(0)\overline{g(0)} \tag{21}$$

è $\mathcal{D}$ stesso (vedi [Z])[6].

Quindi, μ è Carleson se e solo se $\Theta = Id^*$, l'aggiunto di Id,

$$\Theta : L^2(\mu) \to \mathcal{D}$$

[6]Questo risultato di dualità ci dice che, in un certo senso, possiamo trattare $\mathcal{D}$ come se fosse uno spazio L^2. La sua dimostrazione dipende dalla limitatezza della *proiezione di Bergman*, un operatore integrale importante nello studio degli spazi di funzioni olomorfe, ed è estendibile a una classe ben precisa di spazi di Dirichlet pesati (vedi [ARS] e [Bek]), a cui non appartiene, per esempio, $\mathcal{D}_a$, se $a \geq 1$. In ultima istanza, questo è il motivo per cui il Teorema 2 non si estende a $\mathcal{D}_1 = H^2$.

è limitato. Θ può essere esplicitamente calcolato. Ponendo $\phi_z(w) = 1 + \log \frac{1}{1-w\bar{z}}$, abbiamo

$$f(z) = \langle f, \phi_z \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} f'(w) \overline{\left(1 + \log \frac{1}{1 - \bar{z}w}\right)'} m(dw) + f(0).$$

Questa formula riproducente è ben nota e la sua dimostrazione è una facile esercizio sugli sviluppi di Taylor.

Ora, se $g \in L^2(\mu)$,

$$\begin{aligned} \Theta g(z) &= \langle \Theta g, \phi_z \rangle_{\mathcal{D}} = \langle g, \phi_z \rangle_{L^2(\mu)} \\ &= \int_{\mathbf{D}} \left(1 + \log \frac{1}{1 - z\bar{w}}\right) g(w)\mu(dw). \end{aligned}$$

Esplicitando rispetto alle norme in $\mathcal{D}$ e $L^2(\mu)$ la richiesta che Θ sia limitato, abbiamo quindi la disuguaglianza

$$C \int_{\mathbf{D}} |g|^2 d\mu \geq \|\Theta g\|_{\mathcal{D}}^2 \geq \int_{\mathbf{D}} \left| \int_{\mathbf{D}} \frac{1 - |z|^2}{1 - z\bar{w}} \bar{w} g(w)\mu(dw) \right|^2 \frac{m(dz)}{(1 - |z|^2)^2} \tag{22}$$

Per ridurci all'ambito discreto, consideriamo ora funzioni $g \in L^2(\mu)$, aventi la forma

$$g(w) = \frac{|w|}{\bar{w}} h(w)$$

dove $h \geq 0$ ed è costante su ciascuna regione Δ_α. Poniamo $h(\alpha) = h|_{\Delta_\alpha}$. Allora,

$$\|g\|_{L^2(\mu)}^2 = \sum_{\alpha \in T} |h(\alpha)|^2 \mu(\alpha) \tag{23}$$

mentre (22) si specializza a

$$C \sum_{\alpha \in T_2} |h(\alpha)|^2 \mu(\alpha) \geq \|\Theta g\|_{\mathcal{D}}^2 \geq \int_{\mathbf{D}} \left| \int_{\mathbf{D}} \frac{1 - |z|^2}{1 - z\bar{w}} |w| h(w)\mu(dw) \right|^2 \frac{m(dz)}{(1 - |z|^2)^2} \tag{24}$$

Se $z \in D$, sia $\alpha(z) \in T$ l'indice per cui $z \in \Delta_{\alpha(z)}$. Una stima elementare mostra che, se $|z| \geq 1/2$,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{|w|(1 - |z|^2)}{1 - z\bar{w}} \right) \geq 0 \tag{25}$$

se $w \in \mathbb{D}$, e

$$\mathrm{Re}\left(\frac{|w|(1-|z|^2)}{1-z\overline{w}}\right) \geq c > 0, \text{ se } w \in S(\alpha(z))$$

per qualche costante universale c. Qui, $S(\alpha(z))$ è l'insieme dei successori di $\alpha(z)$ nell'albero T.

Utilizzando queste stime e le proprietà (m), (d-d) e (s) della scomposizione, possiamo continuare la catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned}
\|\Theta g\|_{\mathcal{D}}^2 &\geq \int_{\mathbf{D}} \left| \int_{\mathbf{D}} \frac{1-|z|^2}{1-z\overline{w}} |w| h(w)\mu(dw) \right|^2 \frac{m(dz)}{(1-|z|^2)^2} \\
&\geq \int_{\mathbf{D}} \left| \int_{S(\alpha(z))} \frac{1-|z|^2}{1-z\overline{w}} |w| h(w)\mu(dw) \right|^2 \frac{m(dz)}{(1-|z|^2)^2} \\
&\geq c \int_{\mathbf{D}} \left(\sum_{\beta \in S(\alpha(z))} h(\beta)\mu(\beta) \right)^2 \frac{m(dz)}{(1-|z|^2)^2} \\
&\geq c \sum_{\alpha \in T} \left(\sum_{\beta \in S(\alpha)} h(\beta)\mu(\beta) \right)^2
\end{aligned}$$

Sia $\mathcal{I}^*$ l'operatore definito su funzioni $\varphi\colon T \to \mathbb{R}$ come

$$\mathcal{I}^*\varphi(\alpha) = \sum_{\beta \in S(\alpha)} \varphi(\beta)\mu(\beta) \tag{26}$$

Si verifica immediatamente che $\mathcal{I}^*$ è l'aggiunto di $\mathcal{I}$,

$$\sum_T \mathcal{I}^*\psi(\alpha)\varphi(\alpha) = \sum_T \psi(\alpha)\mathcal{I}\varphi(\alpha)\mu(\alpha)$$

La catena di disuguaglianze sopra e (23) mostrano che

$$\mathcal{I}^*\colon l^2(\mu) \to l^2(T)$$

è limitato. Per dualità, deduciamo la limitatezza di

$$\mathcal{I}\colon l^2(T) \to l^2(\mu)$$

come desiderato.$\square$

Vediamo ora come sono intervenuti i principi euristici elencati all'inizio del paragrafo. (i) ci ha indicato che le condizioni affinchè μ sia di Carleson andavano formulate al bordo, mentre (ii) ci ha suggerito di rimpiazzare, in ciascuna regione Δ_α, $|f'|$ con il suo estremo superiore. (iii), finalmente, ci ha detto che ci si poteva dimenticare della struttura "in grande" di f' e che non avremmo perduto informazione considerando al suo posto successioni "destrutturate", cioè, generiche, aventi indici nell'albero T.

Finalmente, la dimostrazione del Teorema 2 è completa se mostriamo la seguente proprietà.

Teorema 4 *Sia μ una funzione non negativa sull'albero T. Allora, sono equivalenti*

(H) Esistono una costante $C(\mu) > 0$ tale che, per ogni funzione $\varphi : T \to \mathbb{R}$,

$$\sum_{x \in T} |\mathcal{I}\varphi(x)|^2 \mu(x) \leq C(\mu) \sum_{x \in T} |\varphi(x)|^2 \tag{27}$$

(T) μ è limitata ed esiste una costante $C_1(\mu) > 0$ tale che, per ogni $r \in T$,

$$\sum_{x \in S(r)} \mu(S(y))^2 \leq C_1(\mu)\mu(S(r)) \tag{28}$$

Infatti, è un esercizio facile, ma noioso, mostrare che la condizione (17) nell'enunciato del Teorema 2 è equivalente alla sua versione discretizzata (T).

A sua volta, la dimostrazione del Teorema 4 si basa su di un argomento oramai classico a base di disuguaglianze "buon λ", che viene riportato in appendice per il lettore interessato.

4 Applicazioni e problemi

Le misure di Carleson intervengono in diversi problemi sulle funzioni negli spazi di Dirichlet analitici, che ne hanno giustificato lo studio. Molti di questi sono varianti di analoghi problemi in H^2, lo spazio di Hardy, il cui studio è precedente. Per brevità, considero il solo caso di $\mathcal{D}$, lo spazio di Dirichlet analitico classico.

Moltiplicatori. Una funzione g olomorfa in D è un *moltiplicatore* per $\mathcal{D}$ se e solo se l'operatore di moltiplicazione

$$M_g : f \mapsto gf$$

è limitato su $\mathcal{D}$. Ora, è facile mostrare che g è un moltiplicatore per $\mathcal{D}$ se e solo se g è limitata su D e la misura

$$d\mu_g = |g'|^2 dm$$

è di Carleson per $\mathcal{D}$. Quindi, ogni caratterizzazione delle misure di Carleson ci dota di una caratterizzazione dei moltiplicatori. Nel seguito, $M(\mathcal{D})$ indicherà lo spazio dei moltiplicatori per $\mathcal{D}$.

Vediamo che, se μ_g è Carleson e g è limitata, allora g è un moltiplicatore. Abbiamo, infatti,

$$\begin{aligned} \|M_g f\|_{\mathcal{D}}^* &= \|(gf)'\|_{L^2(dm)} \leq \|gf'\|_{L^2(dm)} + \|g'f\|_{L^2(dm)} \\ &\leq \|g\|_{L^\infty}\|f\|_{L^2(dm)} + \|f\|_{L^2(|g'|^2 dm)} \leq (\|g\|_{L^\infty} + C(\mu_g))\,\|f\|_{\mathcal{D}}^* \end{aligned}$$

L'implicazione inversa fa ricorso a un trucco d'analisi funzionale [Z].

Successioni interpolanti. Le funzioni in $\mathcal{D}$ sono Hölder-continue rispetto alla distanza nel piano iperbolico:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C\|f\|_{\mathcal{D}}^{*1/2} d(z, z_0)^{1/2} \tag{29}$$

dove

$$d(z, z_0) = \log \frac{1 + \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|}{1 - \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|}$$

è la distanza tra z e z_0 nella metrica (11).[7]

Sia Z una successione di punti in D e si ponga $d(z) = d(0, z) + 1$. Come conseguenza di (29), abbiamo che la *mappa di campionamento*

$$I : f \mapsto \{d(z_j)^{-1/2} f(z_j) : z_j \in Z\}$$

[7]Questo fatto è ben noto ed elementare: se z e z_0 non sono a distanza iperbolica minore di una costante, la loro distanza è a pressapoco il numero minimo di scatole Δ_j in T che una curva deve attraversare per passare da z a z_0. Presi punti $w_j \in \Delta_j$ nelle scatole attraversate, dove l'indice j cresce al progredire delle scatole lungo la curva, possiamo

è limitata da $\mathcal{D}$ a l^∞. Diciamo che Z è una *successione interpolante per* $\mathcal{D}$ se I è limitata e *suriettiva* da $\mathcal{D}$ a l^2.

La parte "limitatezza" della definizione I è soddisfatta se e solo se la misura μ_Z,

$$\mu_Z = \sum_{j\geq 1} d(z_j)^{-1}\delta_{z_j}$$

è di Carleson per $\mathcal{D}$. Le δ_{z_j} sono masse di Dirac nei punti z_j.

In due lavori ancora non pubblicati del 1994, Bishop [Bi] e Marshall e Sundberg [MS] mostrarono independentemente che Z è interpolante per $\mathcal{D}$ se e solo se μ_Z è di Carleson e se vale la seguente condizione di separazione: per ogni coppia di punti distinti z e w in Z,

$$d(0,z) \leq Ad(z,w) + B$$

dove A e B sono costanti fissate. Recentemente, Böe [Bo] ha esteso questo risultato a spazi di Besov analitici, cioè, a spazi definiti dalla limitatezza della norma (10), con $a = 0$, ma con un esponente p, $1 < p < \infty$, al posto di 2.[8]

Vorrei citare ora alcuni problemi connessi con misure di Carleson, moltiplicatori e successioni interpolanti, su alcuni dei quali sto conducendo un lavoro di ricerca con Rochberg e Sawyer. La caratterizzazione dei moltiplicatori suggerisce di introdurre lo spazio X delle funzioni g olomorfe in D e

---

stimare, come nella dimostrazione del Teorema 2,

$$\begin{aligned}|f(w_{j-1}) - f(w_j)| &= \left|\int_{w_{j-1}}^{w_j} f'(t)dt\right| \\ &\leq (\mathrm{diam}(\Delta_{j-1}) + \mathrm{diam}(\Delta_j))(\sup_{\Delta_{j-1}\cup\Delta_j} |f'|) \\ &\leq C\mathrm{diam}(\Delta_j)\left(\frac{1}{m(\Delta_j)}\int_{\Delta_{j-1}\cup\Delta_j}|f'|^2 dm\right)^{1/2}\end{aligned}$$

l'ultima disuguaglianza essendo una conseguenza della proprietà del valor medio. Utilizzando la relazione tra diametro e misura delle scatole Δ e sommando su j, otteniamo (29).

[8][MS] (e [Bo], per $p \neq 2$) mostrano che le successioni Z interpolanti per $\mathcal{D}$ sono interpolanti anche per i moltiplicatori di $\mathcal{D}$; cioè, che la mappa

$$J : h \mapsto \{h(z_j) : z_j \in Z\}$$

applica $M(\mathcal{D})$, lo spazio dei moltiplicatori di $\mathcal{D}$, *su* l^∞.

tali che μ_g sia una misura di Carleson. Tale spazio dovrebbe svolgere per $\mathcal{D}$ un ruolo analogo a quello che BMO, lo spazio delle funzioni a oscillazione media limitata, svolge per H^2, così come lo spazio dei moltiplicatori di $\mathcal{D}$ dovrebbe svolgere un ruolo simile ad H^{∞}[9], il corrispondente spazio di moltiplicatori per H^2. Avendo come riferimento in H^2 alcuni profondi risultati di C. Fefferman [FS], si possono fare alcune congetture e porre alcuni problemi, che meglio si formulano nel contesto delle funzioni armoniche. Sia X_{arm} lo spazio delle funzioni armoniche in D e tali che $|\nabla g|^2 dm$ sia di Carleson per $\mathcal{D}$ e sia $M_{\text{arm}} = X_{\text{arm}} \cap H^{\infty}_{\text{arm}}$, dove H^{∞}_{arm} è lo spazio delle funzioni armoniche e limitate su D (dunque, $M(\mathcal{D})$ contiene quelle funzioni in M_{arm} che sono olomorfe in D).

(i) È possibile caratterizzare le funzioni in X_{arm} in termini dei loro valori al bordo?

(ii) Ci si aspetta che i valori al bordo delle funzioni in X_{arm} soddisfino una condizione modellata su quella di John-Niremberg per BMO. In particolare, congetturiamo che, se g appartiene a X, allora, per qualche $A > 1$,

$$\int_{[0,2\pi]} \exp\left(A^{|g(e^{i\theta})|}\right) d\theta < \infty$$

(iii) Congetturiamo che la trasformata di Hilbert,

$$Hg(e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} \cot(\eta) g(e^{i(\theta-\eta)}) d\eta$$

mappi M_{arm} in X_{arm}.

(iv) È possibile trovare una caratterizzazione esplicita per lo spazio preduale di X?

Riguardo al problema dell'interpolazione per successioni, che aveva in principio motivato il lavoro di ricerca che ho esposto, l'articolo di Böe vi dà una soluzione pienamente soddisfacente, anche quando si consideri una potenza diversa da 2 nella definizione di norma (10). Un aspetto che rimane aperto è come la suriettività di I (e di J) possa essere caratterizzata indipendentemente dalla sua limitatezza. La mia personale congettura è che I

[9] H^{∞} è lo spazio delle funzioni olomorfe e limitate su D.

sia suriettivo quando e solo quando valga la condizione "a una scatola":

$$\sum_{z_j \in Z \cap S(I)} d(z_j)^{-1} \leq C(Z)(1 + d(0, S(I)))^{-1}$$

che particolarizza la condizione di tipo Adams (15) alla misura μ_Z. Il lavoro su questo problema, sempre in collaborazione con Rochberg e Sawyer, è tuttora in corso. Bishop ha stabilito una interessante connessione tra il problema della suriettività di I e la caratterizzazione delle successioni che possono essere insiemi di zeri per funzioni in $\mathcal{D}$, un problema aperto da molti anni, per la cui discussione rimando a [Bi].

Appendice: dimostrazione del Teorema 4

Supponiamo che valga la condizione (H). Dovendo (H) valere quando $\varphi = \delta_o$, una massa unitaria posta nella radice di T, μ è forzatamente limitata. Per dualità, inoltre, $\mathcal{I}^*$, l'aggiunto di $\mathcal{I}$ definito da (26), dev'essere limitato da $l^2(\mu)$ a l^2. Imponendo che la corrispondente disuguaglianza sia verificata da funzioni caratteristiche del tipo

$$\varphi = \chi_{S(r)}$$

si ottiene

$$\sum_{x \in T} \left(\sum_{y \in S(x) \cap S(r)} \mu(y) \right)^2 \leq C(\mu) \sum_{y \geq r} \mu(y)$$

da cui (T) segue immediatamente.

Supponiamo che μ sia limitata e che valga la condizione (28). Vogliamo allora dimostare che $\mathcal{I} : l^2 \to l^2(\mu)$ è limitata, cioè che

$$\|\mathcal{I}g\|_{l^2(\mu)} \leq C \|g\|_{l^2} \tag{30}$$

per qualche $C = C(\mu) > 0$. Ci basta mostrare che (30) vale per $g \geq 0$. In tal caso, $\mathcal{I}g$ è nondecrescente rispetto alla relazione d'ordine parziale introdotta su T. Sia

$$\Omega_k = \{x : \mathcal{I}g(x) > 2^k\} = \bigcup_j S(r_j^k) = \bigcup_j Q_j^k$$

dove $\{r_j^k : j = 1, \dots\} \subset T$ è l'insieme dei punti in Ω_k che sono minimali rispetto all'ordine parziale in T e dove $Q_j^k = S(r_j^k)$. Supponiamo che nessun r_j^{k+1} coincida con un r_j^k e lasciamo al lettore le facili modifiche da fare per il caso generale.

Sia $E_j^k = S(r_j^k) \cap (\Omega_{k+1} \setminus \Omega_{k+2})$. Allora, se $x \in E_j^k$,

$$\mathcal{I}(\chi_{Q_j^k} g)(x) = \sum_{r_j^k \leq y \leq x} g(y) = \mathcal{I}g(x) - \mathcal{I}g((r_j^k)^-) > 2^{k+1} - 2^k = 2^k. \tag{31}$$

Qui, poniamo $\mathcal{I}g((r_j^k)^-) = 0$ se $(r_j^k)^- = o$. Quindi,

$$\begin{aligned} 2^{k+1}\mu\left(E_j^k\right) &= 2^k \sum_{x\in E_j^k} \mu(x) \le \sum_{x\in E_j^k} \mathcal{I}(\chi_{Q_j^k} g)(x)\mu(x) \\ &= \sum_{y\in Q_j^k} g(y) \sum_{x\in E_j^k, x\ge y} \mu(x) = \sum_{y\in Q_j^k} g(y)\mathcal{I}^*\chi_{E_j^k}(y). \end{aligned}$$

Indichiamo il complementare di Ω_{k+2} con Ω_{k+2}^c e notiamo che $\mathcal{I}^*\chi_{E_j^k}(y) = 0$ quando $y \in Q_j^k \cap \Omega_{k+2}$. Ne segue che

$$2^{k+1}\mu\left(E_j^k\right) \le \sum_{y\in Q_j^k\cap\Omega_{k+2}^c} g(y)\mathcal{I}^*\chi_{E_j^k}(y). \tag{32}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \sum_{x\in T} |\mathcal{I}g(x)|^2 \mu(x) &\le \sum_k \mu\left(x\colon 2^{k+1} \le \mathcal{I}g(x) < 2^{k+2}\right) 2^{2(k+2)} \\ &= C\sum_k \mu\left(\Omega_{k+1}\backslash\Omega_{k+2}\right) 2^{2k} \\ &\le C\sum_{k,j} \mu\left(E_j^k\right) 2^{2k} = C\left(\sum_{(k,j)\in E} + \sum_{(k,j)\in F}\right) \mu\left(E_j^k\right) 2^{2k} \\ &= C\left(\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2\right). \end{aligned}$$

Qui,

$$\begin{aligned} E &= \left\{(k,j)\colon \mu\left(E_j^k\right) \le \beta\mu\left(Q_j^k\right)\right\}, \\ F &= \left\{(k,j)\colon \mu\left(E_j^k\right) > \beta\mu\left(Q_j^k\right)\right\}, \end{aligned}$$

e β è una costante positiva che verrà scelta in seguito. Nelle disuguaglianze più sotto, C sarà una costante indipendente da g e β. Per stimare la prima somma, si noti che, per la definizione di Ω_k,

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &\le \beta \sum_{(k,j)} \mu\left(Q_j^k\right) 2^{2k} = \beta \sum_k \mu\left(\Omega_k\right) 2^{2k} \\ &\le C\beta \sum_{x\in T} |\mathcal{I}g(x)|^2 \mu(x) = C\beta \left\|\mathcal{I}g\right\|_{l^2(\mu)}^2. \end{aligned}$$

D'altra parte, $\sum_2$ può essere stimata da

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits_2 &\leq \sum_{(k,j)\in F} \mu\left(E_j^k\right) 2^{2k} \\
\text{(per (32))} &\leq \sum_{(k,j)\in F} \left| \mu\left(E_j^k\right)^{-1} \sum_{y\in Q_j^k\cap\Omega_{k+2}^c} g(y)\mathcal{I}^*\chi_{E_j^k}(y) \right|^2 \\
\text{(per la definizione di } F) &\leq \beta^{-2} \sum_{(k,j)} \frac{\mu\left(E_j^k\right)}{\mu\left(Q_j^k\right)^2} \left| \sum_{y\in Q_j^k\cap\Omega_{k+2}^c} g(y)\mathcal{I}^*\chi_{E_j^k}(y) \right|^2 \\
\text{(per Cauchy-Schwarz)} &\leq \beta^{-2} \sum_{(k,j)} \mu\left(Q_j^k\right)^{-1} \left(\sum_{y\in Q_j^k\cap\Omega_{k+2}^c} \left|\mathcal{I}^*\chi_{E_j^k}(y)\right|^2 \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{y\in Q_j^k\cap\Omega_{k+2}^c} g(y)^2 \right) \\
\text{(per (28))} &\leq C\beta^{-2} \sum_{(k,j)} \left(\sum_{y\in Q_j^k\cap\Omega_{k+2}^c} g(y)^2 \right) \\
&= C\beta^{-2} \left(\sum_k \sum_{\Omega_k\setminus\Omega_{k+2}} g(y)^2 \right) \\
&= C\beta^{-2} \left(\sum_{y\in T} g(y)^2 \right)
\end{aligned}
$$

Dalle stime per Σ_1 e Σ_2, otteniamo che

$$
\sum_{x\in T} |\mathcal{I}g(x)|^2 \mu(x) \leq C\beta \sum_{x\in T} |\mathcal{I}g(x)|^2 \mu(x) + C\beta^{-2} \sum_{y\in T} g(y)^2
$$

Scegliendo il parametro β abbastanza piccolo, possiamo riassorbire il primo addendo a destra nel membro a sinistra, quindi $\mathcal{I}$ è limitato.

Riferimenti bibliografici

[Ad] D.R. Adams, *A trace inequality for generalized potentials*, Studia Math. 48 (1973), 99-105.

[AdH] D. Adams, L.I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer, Berlin (1996).

[A] N. Arcozzi, *Carleson measures for the analytic Besov spaces: the upper triangle case*, (2000) preprint inviato a rivista.

[AR] N. Arcozzi, R. Rochberg, *Topics in dyadic Dirichlet spaces*, (2000) preprint.

[ARS] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, *Carleson measures for the analytic Besov spaces*, di prossima pubblicazione su Rev. Mat. Iberoam.

[Bek] D. Bekollé, *Inégalités à poids pour le projecteur de Bergman dans la boule unité de* $\mathbb{C}^n$, Studia Math. 71 (1982), 305-323.

[Bi] C.J. Bishop, *Interpolating sequences for the Dirichlet space and its multipliers*, (1994) preprint.

[Bo] B. Böe, *Interpolating sequences for Besov spaces*, (2000), preprint.

[Car] L. Carleson, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. Math. **76** (1962), 547-559.

[COV] C. Cascante, J.M. Ortega, I.E. Verbitsky *Trace inequalities of Sobolev type in the upper triangle case* Proc. London Math. Soc. 3 (**80**) (2000), 391-414.

[F] C. Fefferman, *The uncertainty principle* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **9** no. 2 (1983), 129–206.

[FS] C. Fefferman, E.M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[KV] N.J. Kalton, I.E. Verbitsky, *Nonlinear equations and weighted norm inequalities*, Trans. AMS 351 (1999), 3441-3497.

[KS1] R. Kerman, E. Sawyer, *The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators*, Ann. Inst. Fourier **36**, 4 (1986), 207-228.

[KS2] R. Kerman, E. Sawyer, *Carleson measures and multipliers of Dirichlet-type spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 309 (1988), 87-98.

[M] V.G. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Springer, Berlin (1995).

[MS] D.E. Marshall, C. Sundberg, *Interpolating sequences for the multipliers of the Dirichlet space*, (1994) preprint.

[Ste] D. Stegenga, *Multipliers of the Dirichlet space*, Illinois J. Math. **24** (1980), 113-139.

[V] I.E. Verbitsky, *Nonlinear potentials and trace inequalities*, in Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 110, Birkhäuser Basel (1999), 323-343.

[Z] K. Zhu, *Operator theory on function spaces*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel (1990).